

SUR LA DÉFINITION DE LA VITESSE DE DÉFORMATION ÉLASTIQUE ET SA RELATION AVEC LA VITESSE DE CONTRAINTE

J. MANDEL

Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

(Received 19 May 1980; in revised form 24 September 1980)

Resume—L'auteur étudie la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte pour un élément élastoplastique en transformation finie.

Abstract—The definition of the elastic strain rate and its relation with the stress rate are studied for an elastoplastic element in finite transformation.

1. INTRODUCTION

On considère le comportement d'un élément de matière élastoplastique ou élastoviscoplastique écrouissable. L'état d'écrouissage de l'élément est représenté par un certain nombre de variables internes scalaires ou tensorielles α_k qui sont liées à la distribution des défauts dans les réseaux atomiques des cristaux constitutifs. Dans une déformation élastique, les α_k ne varient pas.

Lorsque la transformation subie par l'élément reste infinitésimale, aucune difficulté ne se présente pour décomposer la vitesse de déformation sous forme additive en vitesse de déformation élastique et vitesse de déformation plastique (relations classiques de Prandtl-Reuss). Il n'en est plus de même lorsque la transformation est finie. Il est certes toujours possible de décomposer sous forme additive la vitesse de déformation totale, mais la définition de la partie réputée "élastique" n'est pas aussi évidente qu'il semble a priori et fait encore l'objet de discussions [1-3]. Le présent article a pour but de faire le point sur ce sujet,† quoique nous l'ayons déjà examiné incidemment (d'une façon moins approfondie) dans diverses publications antérieures [4-8].

Pour décrire le comportement élastoplastique ou élastoviscoplastique, on peut utiliser une représentation strictement lagrangienne, ou strictement eulérienne, ou enfin par l'intermédiaire d'une configuration relâchée (κ). Dans ce dernier cas, on pose

$$F = EP. \quad (1)$$

F est le gradient de la transformation qui fait passer d'une configuration initiale non contrainte (0) de l'élément à configuration actuelle (a), P le gradient de la transformation (0) \rightarrow (κ), E celui de la transformation (κ) \rightarrow (a).

2. REPRESENTATION LAGRANGIENNE

Définissons l'état thermodynamique de l'élément par le tenseur des contraintes de Kirchhoff π_0 relatives à la configuration fixe (0), la température θ et les variables internes a_k (constituées par les variables ci-dessus désignées par α_k reportées dans la configuration initiale, ce qui, en plus des α_k , introduit le tenseur P). Introduisant avec Rice [9] l'enthalpie libre $\psi(\pi_0, \theta, a_k)$, on obtient, Δ_0 désignant le tenseur de déformation de Green par rapport à la configuration (0), ρ_0 la

†Nous insistons essentiellement sur la décomposition de la vitesse de déformation, non sur celle de la transformation, parce que les équations de la plasticité introduisent les vitesses.

masse volumique dans cette déformation

$$\Delta_0 = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \pi_0}$$

$$\dot{\Delta}_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \pi_0 \partial \pi_0} \dot{\pi}_0 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \pi_0 \partial \theta} \dot{\theta} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \pi_0 \partial a_h} \dot{a}_h^T. \quad (T = \text{transposé})$$

Le premier terme, qu'on peut encore écrire†

$$\dot{\Delta}_0^e = L^0 : \dot{\pi}_0 + \lambda^0 \dot{\theta} \quad (2)$$

est la vitesse de déformation élastique lagrangienne, car $\dot{\Delta}_0$ s'y réduit lorsque $\dot{a}_h = 0$. Le second est la vitesse de déformation plastique lagrangienne.

3. REPRESENTATION EULERIENNE

Ici les choses deviennent moins simples. La vitesse de déformation élastique D^e se définit en imaginant une décharge élastique infinitésimale de l'élément.‡ Peu importe d'ailleurs la vitesse de rotation de l'élément dans cette décharge, puisque le tenseur vitesse de déformation est une grandeur objective.

Mais si la définition de D^e ne comporte pas d'ambiguïté,§ il n'en est pas de même de la vitesse de contrainte et de la relation entre D^e et cette vitesse de contrainte.

D'après la règle de transformation d'un tenseur 2 covariant, la vitesse de déformation totale $D = D^e + D^p$ est la transmuée de $\dot{\Delta}_0$ par la transformation F

$$D = F^{T-1} \dot{\Delta}_0 F^{-1}.$$

La même règle s'applique à la vitesse D^e . D'autre part le tenseur des complaisances élastiques L se transforme comme un capacité 4 covariante

$$L_{ijkl}^{(a)} = F_{ai}^{-1} F_{bj}^{-1} F_{ck}^{-1} F_{dl}^{-1} \det FL_{\alpha\beta\gamma\delta}^0$$

$L^{(a)}$ étant relatif à l'état actuel.

On est donc conduit à transcrire (2) sous la forme

$$D^e = L^{(a)} : \overset{\vee}{\sigma} + A^{(a)} \dot{\theta} \quad (3)$$

où $\overset{\vee}{\sigma}$ est une dérivée temporelle objective du tenseur de Cauchy σ . C'est dans la définition de cette dérivée que se présente une difficulté. Il est clair que dans la transformation élastique infinitésimale n'interviennent pas les vitesses totales v à la charge mais certaines vitesses élastiques v^e , pour autant qu'on puisse définir sans ambiguïté ces vitesses. Tel est le cas pour un monocristal où on les définira comme étant celles du réseau atomique au cours du chargement. Dans un tel cas on pourra poser:

$$\overset{\vee}{\sigma} = \sigma - \text{grad } v^e \cdot \sigma - \sigma \cdot \text{grad}^T v^e + \sigma \text{ tr} (\text{grad } v^e).$$

Malheureusement, dans le cas général, si nous pouvons bien définir sans ambiguïté D^e , il

†Le signe: Signifie double contraction ($L_{ijkl}^0 \pi_k^0$).

‡Pour cela, prenant comme configuration de référence entre t et $t + dt$ la configuration à l'instant t , on imagine qu'à l'instant $t + dt$ on ramène la contrainte de Kirchoff à la valeur qu'elle avait à l'instant t .

§Toutefois si dans la décharge infinitésimale on convenait de ramener à la valeur qu'elle avait à l'instant t , non pas la contrainte de Kirchoff π , mais le quotient π/ρ_s , on obtiendrait une définition différente de D^e lorsque la déformation plastique comporte une variation de volume.

n'en va pas de même pour $\text{grad } v^e$ (il faudrait définir $\text{rot } v^e$). Ceci nous oblige à abandonner provisoirement la représentation strictement eulérienne.

4. REPRESENTATION A L'AIDE D'UNE CONFIGURATION INTERMEDIAIRE RELÂCHÉE

De l'éqn (1), en dérivant par rapport à t , on déduit:

$$\text{grad } v = \dot{F}F^{-1} = \dot{E}E^{-1} + E\dot{P}P^{-1}E^{-1}. \quad (5)$$

Nous désignons par $\{u\}_S$ la partie symétrique d'un tenseur u , par $\{u\}_A$ sa partie antisymétrique.

$\{\dot{E}E^{-1}\}_S$ dépend de la configuration relâchée choisie (κ). C'est pour cette raison que nous avons en [4] introduit les notions de *repère directeur* (un repère dans lequel l'état thermodynamique est défini par le tenseur de déformation de Green par rapport à (κ), la température θ et les variables internes α_k , à l'exclusion des variables externes d'orientation)† et de configuration relâchée *isocline* κ_0 (une configuration relâchée dans laquelle le trièdre directeur reste parallèle aux axes du laboratoire).

Malgré cette précision $\{\dot{E}E^{-1}\}_S$ ne coïncide pas en général avec la vitesse eulérienne D^e . Certes, $\Delta^e = (1/2)(E^T E - I)$ est la déformation élastique par rapport à la configuration relâchée actuelle. Mais sa dérivée $\{\dot{E}E^{-1}\}_S$ n'est pas en général la vitesse de déformation élastique, parce que, à t et $t + dt$, le tenseur E n'est pas rapporté à la même base. En effet, la configuration relâchée a changé entre ces 2 instants (elle a tourné et s'est déformée). Il en résulte que Δ^e n'est pas en général la transmuée de D^e par la transformation E^{-1} .

Désignons par π le tenseur des contraintes de Kirchhoff relatif aux configurations relâchées isoclines (κ_0), de masse volumique ρ_κ , ‡ H l'enthalpie libre par rapport à κ_0 , fonction de π , θ et des α_k . On a ([4, 7]):

$$\Delta^e = -\rho_\kappa \frac{\partial H}{\partial \pi}$$

$$\dot{\Delta}^e = -\rho_\kappa \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \pi \partial \pi} \dot{\pi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \pi \partial \theta} \dot{\theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(\rho_\kappa \frac{\partial H}{\partial \pi} \right) \dot{\alpha}_k^T.$$

ou

$$\dot{\Delta}^e = L^{(\kappa_0)} \dot{\pi} + A^{(\kappa_0)} \dot{\theta} + \frac{\partial \Delta^e}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k^T. \quad (6)$$

Puisque, par définition, D^e ne doit pas dépendre des $\dot{\alpha}_k$, elle n'est pas la transmuée par la transformation E de $\dot{\Delta}^e$,§ mais celle de

$$\mathcal{D}_e = \dot{\Delta}_e - \frac{\partial \Delta^e}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k^T. \quad (7)$$

Autrement dit

$$D^e = E^{T-1} \left(\dot{\Delta}_e - \frac{\partial \Delta^e}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k^T \right) E^{-1}. \quad (8)$$

Si et seulement si l'expression de l'enthalpie libre se sépare sous la forme

$$H = \rho_\kappa^{-1} [H_1(\pi, \theta) + H_2(\theta, \alpha_k)] \quad (9)$$

†Il existe en fait toute une classe de repères directeurs possibles[4]. Le choix d'un repère directeur privilégié, évident pour un monocristal (le réseau atomique), est précisé pour un polycristal dans une étude à paraître dans Journ. Mécanique.

‡Noter que ρ_κ peut être fonction des α_k si la déformation plastique s'effectue avec variation de volume.

§La puissance instantanément récupérable est $(\sigma : D^e/\rho) = (\pi : \mathcal{D}^e/\rho_\kappa)$ et non: $(\pi : \dot{\Delta}_e/\rho_\kappa)$.

(les matrices $L^{(\kappa_0)}$, $A^{(\rightarrow_0)}$ sont alors indépendantes de l'écroutissage) le terme en $\partial \Delta^e / \partial \alpha_k$ disparaît dans (8).

La distinction entre $\dot{\Delta}_e$ et \mathcal{D}_e a pour la première fois été reconnue en [7, 8]. Cette distinction fait disparaître les termes en $\dot{\alpha}$ introduits par erreur dans l'expression de la vitesse de déformation élastique dans une de mes publications antérieures [4].

Retenons que, lorsque l'écroutissage affecte le comportement élastique, si l'on pose

$$D = D^e + D^p.$$

D^e et D^p ne se réduisent pas aux parties symétriques de $\dot{E}E^{-1}$ et $E\dot{P}P^{-1}E^{-1}$ (même évaluées pour des configurations isoclines). On a

$$D^e = \{\dot{E}E^{-1}\}_S - D', \quad D^p = \{E\dot{P}P^{-1}E^{-1}\}_S + D' \quad (10)$$

en posant

$$D' = E^{T-1} \frac{\partial \Delta^e}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k^T E^{-1}. \quad (11)$$

5. RETOUR AUX VARIABLES D'EULER

Puisque

$$D^e = E^{T-1} \mathcal{D}^e E^{-1} \quad (12)$$

où \mathcal{D}^e est constitué par les 2 premiers termes du second membre de (6), nous obtenons

$$D^e = L^{(a)} : \overset{\vee}{\sigma} + A \dot{\theta} \quad (3')$$

en posant

$$L_{ijkl}^{(a)} = E_{ai}^{-1} E_{bj}^{-1} E_{\gamma k}^{-1} E_{\delta l}^{-1} L_{a\beta\gamma\delta}^{(\kappa_0)} \det E \quad (13)$$

$$\overset{\vee}{\sigma} = \dot{\sigma} - \dot{E}E^{-1} \sigma - \sigma E^{T-1} \dot{E}^T + \sigma \operatorname{tr}(\dot{E}E^{-1}). \quad (14)$$

On a ainsi retrouvé la formule (3). Et (14) donne la définition générale de la dérivée objective $\overset{\vee}{\sigma}$ qui doit y figurer. On remarque que, lorsque $D^e = 0$, c'est-à-dire lorsqu'il existe un repère directeur privilégié dans lequel la matrice $L^{(\kappa_0)}$ est indépendante de l'écroutissage et lorsqu'on utilise ce repère pour définir E , on retrouve la relation (4) en égalant grad v^e à $\dot{E}E^{-1}$, mais d'après (10) ceci n'est possible que si $D^e = 0$.

Pour introduire la dérivée de Truesdell $\overset{\vee}{\sigma}$, on a tenu compte des relations

$$\pi = E^{-1} \sigma E^{T-1} \det E$$

$$(\det E) = \det E \operatorname{tr}(\dot{E}E^{-1}).$$

6. REMARQUES

L'expression (14) de $\overset{\vee}{\sigma}$ n'est pas très commode. Les remarques suivantes visent à simplifier la relation (3)'.

1. En introduisant au lieu de σ le tenseur $\tau = (\rho_e / \rho) \sigma$ on élimine le dernier terme de (14) et

on obtient

$$D^e = (\rho/\rho_\kappa)L^{(a)}: (\dot{\tau} - \dot{E}E^{-1}\tau - \tau E^{T-1}\dot{E}^T) + A\dot{\theta}. \quad (15)$$

2. Désignons par W la partie antisymétrique de $\dot{E}E^{-1}$, de sorte que

$$\dot{E}E^{-1} = D^e + D' + W.$$

En multipliant les 2 membres de (15) par M matrice inverse de $(\rho/\rho_\kappa)L^{(a)}$, on obtient

$$\dot{\tau} - (W + D')\tau + \tau(W - D') = M': D^e - M: A\dot{\theta}$$

avec

$$M'_{klij} = M_{klij} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{jl}\tau_{ik} + \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il})$$

puis, inversant à nouveau, avec $L' = M'^{-1}$

$$D^e = L': [\dot{\tau} - (W + D')\tau + \tau(W - D')] + A'\dot{\theta} \quad (16)$$

La matrice M' a les symétries classiques des matrices d'élasticité L et M . Il en est donc de même de la matrice L' .

Tenant compte de (5), on a, en désignant par ω le tourbillon $((1/2) \text{rot } v)$ de la vitesse totale

$$W = \omega - \Omega_p, \quad \Omega_p = \{E\dot{P}P^{-1}E^{-1}\}_A \dagger \quad (17)$$

(l'indice A désigne la partie antisymétrique du tenseur encadré).

La relation (16) est intéressante dans le cas où il y a *isotropie dans les configurations relâchées*, car alors $\Omega_p = 0$, ‡ donc $W = \omega$. Si en outre l'*écrouissage n'affecte pas le comportement élastique* (d'où $D' = 0$), on obtient

$$D^e = L': (\dot{\tau} - \omega\tau + \tau\omega) + A'\dot{\theta}. \quad (18)$$

On retrouve ainsi par une voie directe et en partant du résultat général une formule établie par Lee et Lubarda [3].

$\dot{\tau} - \omega\tau + \tau\omega$ est la dérivée de Jaumann de tenseur τ .

Plus généralement, lorsque $D' = 0$, la relation (16) introduit encore une dérivée du type de Jaumann, mais c'est la *dérivée du tenseur τ dans un repère animé de la vitesse de rotation $W = \omega - \Omega_p$* .

3. Lorsque les *déformations thermoélastiques restent infinitésimales*, si l'on décompose E sous la forme polaire

$$E = RS \quad (R^T R = 1, \quad S^T = S), \quad (19)$$

S ne diffère de 1 que d'une quantité infinitésimale, de sorte que $\dot{E}E^{-1}$ peut dans (14) ou (15) être remplacé par $\dot{R}R^{-1}$ vitesse de rotation du repère directeur suivi dans la configuration relâchée κ_1 qui se déduit de la configuration actuelle (a) par une déformation pure. D'autre part, D' est infinitésimal. On obtient donc

$$D^e = L^{(a)}: (\dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W) + A\dot{\theta}$$

†Le gradient $\dot{P}P^{-1}$ de la vitesse de transformation plastique est donné *complètement* (pas seulement sa partie symétrique) par la relation de comportement plastique [4-6].

‡Décomposons E sous la forme polaire (19). S , $\dot{P}P^{-1}$ et S^{-1} sont 3 tenseurs symétriques ayant les mêmes directions principales, celles de $\Delta\epsilon$, donc leur produit est symétrique et par suite aussi $E\dot{P}P^{-1}E^{-1}$.

avec

$$W = \dot{R}R^T = \omega - R\{\dot{P}P^{-1}\}_A R^T.$$

On voit intervenir la *dérivée de Jaumann du tenseur σ dans le trièdre directeur pris dans la configuration κ_1* , résultat que nous avons indiqué en [4-6], où la vitesse de rotation de ce trièdre était notée ω_D^1 .

7. CONCLUSION

On a surtout porté l'attention sur la vitesse de déformation élastique D^e en variables d'Euler (aucune difficulté ne se présente en variables de Lagrange). On a montré que:

1. Elle est univoquement définie (d'ailleurs simplement transmuée de la vitesse lagrangienne).

2. Elle est fonction linéaire d'une certaine vitesse de contrainte, mais pour définir cette dernière, on doit faire appel (sauf dans le cas d'isotropie dans les configurations relâchées) à la notion de repère directeur pour les configurations relâchées.

Pour terminer il paraît utile de souligner que les 3 relations

$$\dot{\Delta}_0^e = L^0: \dot{\pi}_0 + A^0 \dot{\theta} \quad (2)$$

$$\mathcal{D}^e = L^{(\kappa_0)}: \dot{\pi} + A^{(\kappa_0)} \dot{\theta} \quad (7)$$

$$D^e = L^{(a)}: \dot{\sigma} + A^{(a)} \dot{\theta} \quad (3)$$

ne sont que les 3 aspects *d'une même relation intrinsèque* suivant la configuration de référence utilisée (0, κ_0 ou a). Le passage d'une configuration à une autre s'effectue suivant les règles tensorielles ([10], p. 18). Par exemple pour la vitesse de déformation élastique, tenseur 2 covariant

$$\mathcal{D}^e = P^{T-1} \Delta_0^e P^{-1}, D^e = E^{T-1} \mathcal{D}^e E^{-1} = F^{T-1} \Delta_0^e F^{-1}.$$

De même la puissance instantanément récupérable a les 3 expressions suivantes:

$$\frac{\pi_0: \dot{\Delta}_0^e}{\rho_0} = \frac{\pi: \mathcal{D}^e}{\rho_{\kappa_0}} = \frac{\sigma: D^e}{\rho}.$$

Le point délicat est que dans le passage d'une configuration à une autre la transformation *des vitesses* doit être effectuée en annulant \dot{P} et $\dot{\alpha}_\kappa$ (puisque'il s'agit de vitesses élastiques). On retrouve bien ainsi les définitions correctes de \mathcal{D}^e (formule 7) et de $\dot{\sigma}$ (formule 14).

REFERENCES

1. S. Nemat-Nasser, Decomposition of strain measures and their rate in finite deformation elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures* 15, 155 (1979).
2. E. H. Lee and R. M. McMeeking, Concerning elastic and plastic components of deformation. *Int. J. Solids Structures* 16, 715-721 (1980).
3. E. H. Lee and V. A. Lubarda, A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance. *Sudam* 80-1 (1980).
4. J. Mandel, Plasticité et viscoplasticité. *Cours C.I.S.M. 97 Udine*, Springer, New York (1971).
5. J. Mandel, Director vectors and constitutive equations for plastic and viscoplastic media. *Proc. Symp. Problems of Plasticity*, Warsaw. (Edited by A. Sawczuk) p. 125. Nordhoff (1972).
6. J. Mandel, Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Solids Structures* 9, 725 (1973).
7. J. Mandel, Thermodynamics and plasticity. Dans *Proc. Symp. Foundations of Continuum Thermodynamics Bussaco* (Edited by D. Domingos), p. 283. MacMillan (1973).
8. J. Mandel, Sur la décomposition de la vitesse de déformation. Dans *Topics in Contemporary Mechanics*, CISM Vol. 210, p. 145. Springer (1974).
9. J. R. Rice, Inelastic constitutive relations for solids; an internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 19, 433 (1971).
10. J. Mandel, Introduction à la mécanique des milieux continus déformables. Editions P. W. N. Varsovie (1974).